



سبدهای سرمایه گذاری ریسکی بهینه

بخش سوم

دکتر سید محمد جواد میرطهر

بخشی سوم: سبدهای سرمایه‌گذاری ریسکی بهینه

- تنوع بخشی و ریسک سبد سرمایه‌گذاری
- سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی
- سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک
- مدل مارکوویتز
- قدرت متنوع‌سازی

مقدمه

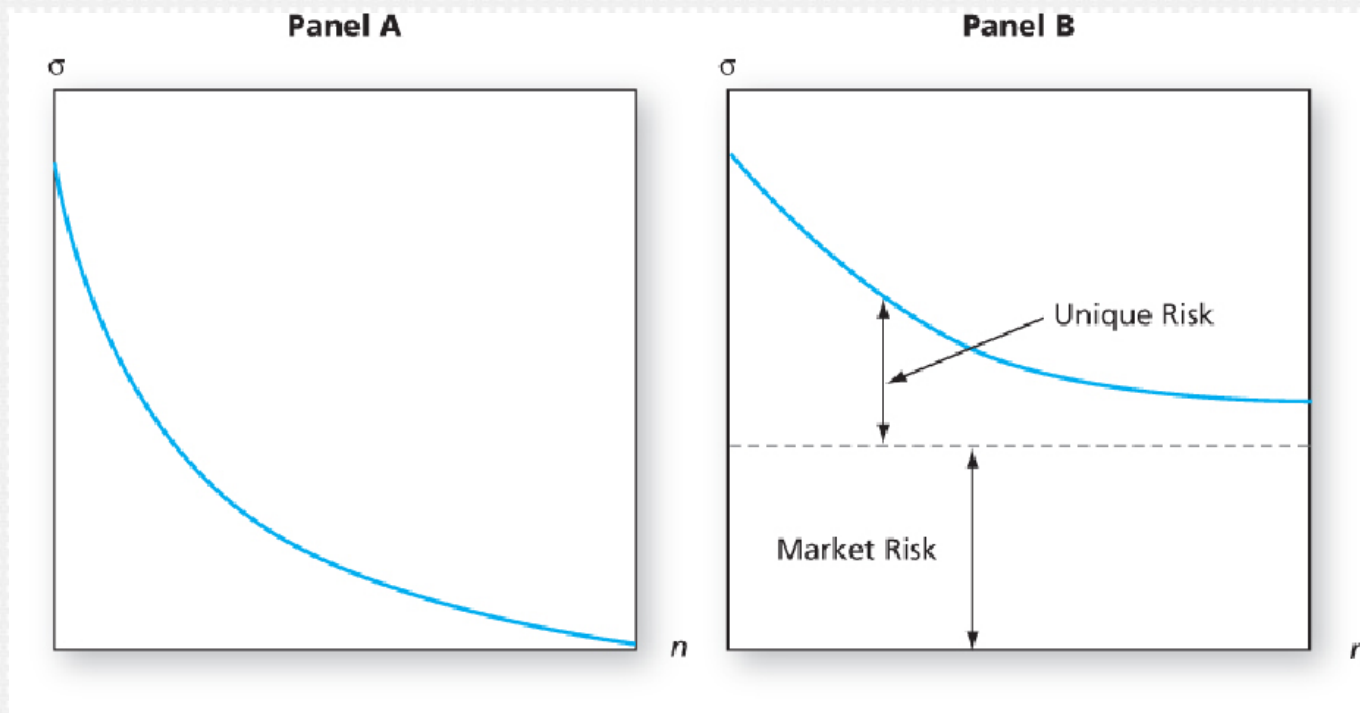
- فرآیند سرمایه‌گذاری از بالا به پایین
- 1. تخصیص سرمایه بین پرتفوی ریسکی و دارایی بدون ریسک (capital allocation) که در بخش قبلی بررسی شد.
- 2. تخصیص دارایی در بین طبقات دارایی‌ها مختلف مانند املاک و مستغلات، سهام، طلا و... (asset allocation)
- 3. انتخاب دارایی‌های مورد نظر در هر طبقه از دارایی‌ها (security selection)؛ مثلاً انتخاب سهام فملی در طبقه سهام

تنوع بخشی و ریسک سبد سرمایه گذاری

■ در هر نوع سرمایه گذاری دو نوع ریسک وجود دارد:

1. ریسک سیستماتیک یا ریسک بازار: این ریسک از طریق متنوع سازی پرتفوی سهامی از بین نمی رود و همواره وجود دارد و مختص یک سهام خاص نمی باشد؛ مانند نوسانات ارزی در اقتصاد ایران که بر کل بازار سهام اثر می گذارد.
2. ریسک غیرسیستماتیک یا مختص به بنگاه: این ریسک وابسته به یک شرکت خاص بوده و بر بقیه شرکت ها اثری ندارد؛ مانند تغییرات مدیریتی در یک شرکت.

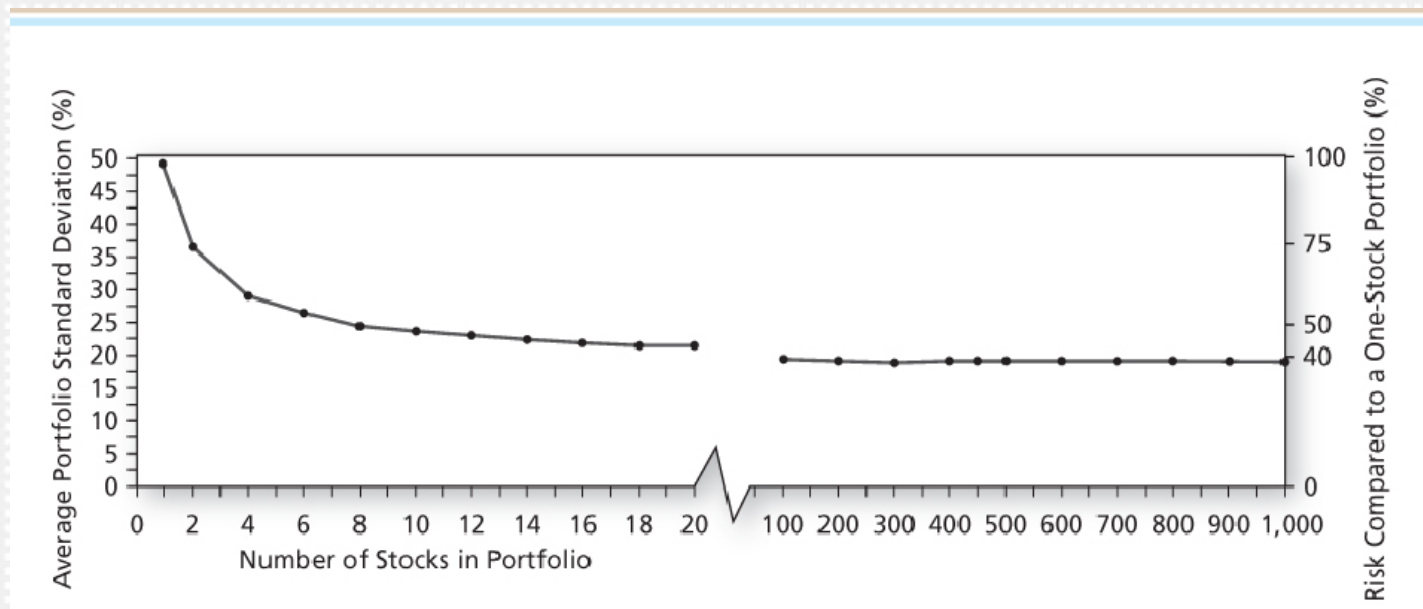
تنوع بخشی و ریسک سبد سرمایه گذاری



■ در صورتی که کل ریسک فقط ریسک خاص شرکتی باشد، از طریق متنوع سازی ریسک پرتفوی صفر خواهد شد. (A)

■ در صورت وجود ریسک بازار متنوع سازی فقط ریسک خاص شرکتی را کاهش داده و بخشی از ریسک همواره باقی خواهد ماند. (B)

تنوع بخشی و ریسک سبد سرمایه گذاری



مشاهدات تجربی بورس نیویورک نشان می دهد که مقدار مشخصی از ریسک بازار وجود دارد که حتی با متنوع سازی کاهش پیدا نمی کند.

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

- ریسک پرتفوی به همبستگی بازدهی بین بازدهی دارایی‌های موجود در پرتفوی وابسته است.
- به منظور محاسبه این همبستگی یا از کوواریانس و یا از ضریب همبستگی استفاده می‌گردد که در ادامه نشان داده خواهد شد.
- جهت متنوع‌سازی پرتفوی باید به این همبستگی توجه ویژه‌ای گردد.

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

- بازدهی مورد انتظار یک پرتفوی سرمایه‌گذاری ریسکی متشکل از دو دارایی مختلف به صورت زیر خواهد بود: (جمع‌وزنی بازدهی‌های مورد انتظار هر سهام یا هر دارایی ریسکی به صورت جداگانه)

$$E(r_p) = w_D E(r_D) + w_E E(r_E)$$

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

- ریسک پرتفوی به همبستگی بازدهی بین بازدهی دارایی‌های موجود در پرتفوی وابسته است.
- به منظور محاسبه این همبستگی یا از کوواریانس و یا از ضریب همبستگی استفاده می‌گردد که در ادامه نشان داده خواهد شد.
- جهت متنوع‌سازی پرتفوی باید به این همبستگی توجه ویژه‌ای گردد.

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ کوواریانس:

$$\text{Cov}(r_S, r_B) = \sum_{i=1}^S p(i) [r_S(i) - \bar{r}_S] [r_B(i) - \bar{r}_B]$$

■ ضریب همبستگی:

$$\rho_{SB} = \frac{\text{Cov}(r_S, r_B)}{\sigma_S \sigma_B}$$

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

▪ بازه ضریب همبستگی:

$$-1.0 \leq \rho \leq 1.0$$

- اگر ضریب همبستگی +۱ باشد یعنی سهام دو شرکت همبستگی مثبت کامل دارند و اگر ضریب همبستگی -۱ باشد یعنی سهام دو شرکت همبستگی منفی کامل دارند.

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ محاسبه انحراف معیار (ریسک) پرتفوی:

$$\sigma_p^2 = w_B^2 \sigma_B^2 + w_S^2 \sigma_S^2 + 2 w_B w_S \sigma_S \sigma_B \rho_{B,S}$$

$$\sigma_p^2 = \text{Portfolio Variance}$$

$$\sqrt{\sigma_p^2} = \text{Portfolio Standard Deviation}$$

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ تحلیل ریسک پرتفوی بر اساس ماتریس واریانس کوواریانس:

Portfolio Weights	w_D	w_E
w_D	$\text{Cov}(r_D, r_D)$	$\text{Cov}(r_D, r_E)$
w_E	$\text{Cov}(r_E, r_D)$	$\text{Cov}(r_E, r_E)$
B. Border-Multiplied Covariance Matrix		
Portfolio Weights	w_D	w_E
w_D	$w_D w_D \text{Cov}(r_D, r_D)$	$w_D w_E \text{Cov}(r_D, r_E)$
w_E	$w_E w_D \text{Cov}(r_E, r_D)$	$w_E w_E \text{Cov}(r_E, r_E)$
$w_D + w_E = 1$	$w_D w_D \text{Cov}(r_D, r_D) + w_E w_D \text{Cov}(r_E, r_D)$	$w_D w_E \text{Cov}(r_D, r_E) + w_E w_E \text{Cov}(r_E, r_E)$
Portfolio variance	$w_D w_D \text{Cov}(r_D, r_D) + w_E w_D \text{Cov}(r_E, r_D) + w_D w_E \text{Cov}(r_D, r_E) + w_E w_E \text{Cov}(r_E, r_E)$	

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ تحلیل ریسک پرتفوی بر اساس ماتریس واریانس کوواریانس:

	w_1	w_2	w_3
w_1	$\text{Cov}(1,1)$	$\text{Cov}(1,2)$	$\text{Cov}(1,3)$
w_2	$\text{Cov}(2,1)$	$\text{Cov}(2,2)$	$\text{Cov}(2,3)$
w_3	$\text{Cov}(3,1)$	$\text{Cov}(3,2)$	$\text{Cov}(3,3)$

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ تحلیل ریسک پرتفوی بر اساس ماتریس واریانس کوواریانس:

Step 2: Symmetry! $Cov(a, b) = Cov(b, a) = \sigma_{a,b}$

	W_1	W_2	W_3
W_1	σ_1^2	$\sigma_{1,2}$	$\sigma_{1,3}$
W_2	$\sigma_{1,2}$	σ_2^2	$\sigma_{2,3}$
W_3	$\sigma_{1,3}$	$\sigma_{2,3}$	σ_3^2

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ تحلیل ریسک پرتفوی بر اساس ماتریس واریانس کوواریانس:

	w_1	w_2	w_3
w_1	$w_1^2 \sigma_1^2$	$w_1 w_2 \sigma_{1,2}$	$w_1 w_3 \sigma_{1,3}$
w_2	$w_1 w_2 \sigma_{1,2}$	$w_2^2 \sigma_2^2$	$w_2 w_3 \sigma_{2,3}$
w_3	$w_1 w_3 \sigma_{1,3}$	$w_2 w_3 \sigma_{2,3}$	$w_3^2 \sigma_3^2$

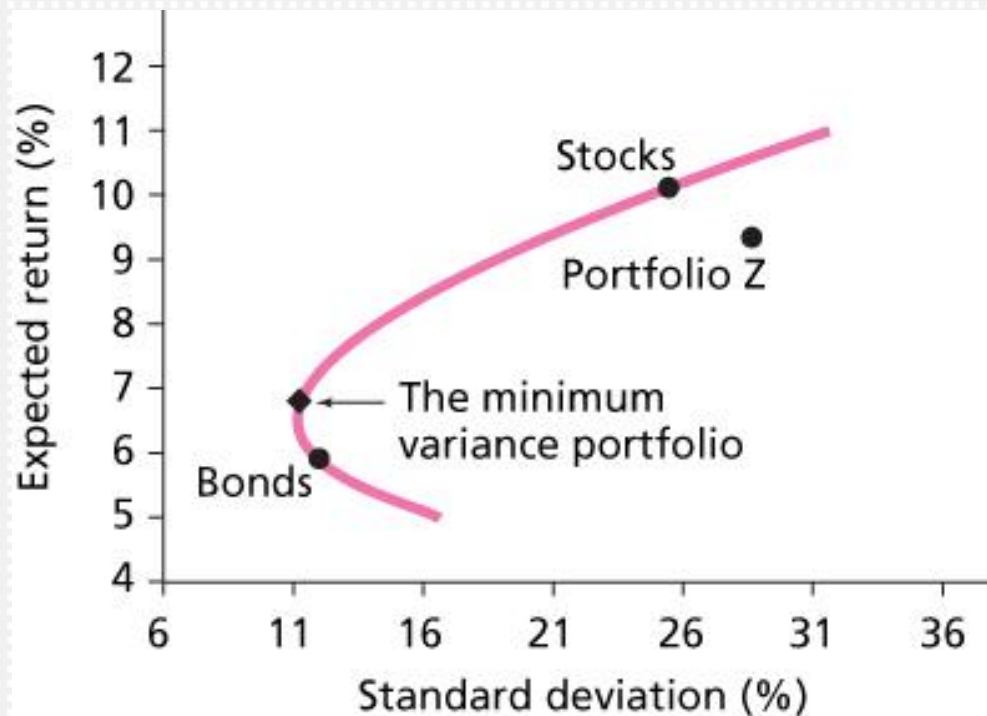
سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ تحلیل ریسک پرتفوی بر اساس ماتریس واریانس کوواریانس:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2 + 2w_1w_2\sigma_{1,2} + 2w_1w_3\sigma_{1,3} + 2w_2w_3\sigma_{2,3}$$

Covariance terms

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی



سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ بررسی یک مثال:

	<u>Debt</u>	<u>Equity</u>
Expected return, $E(r)$	8%	13%
Standard deviation, σ	12%	20%
Covariance, $Cov(r_D, r_E)$		72
Correlation coefficient, ρ_{DE}		.30

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

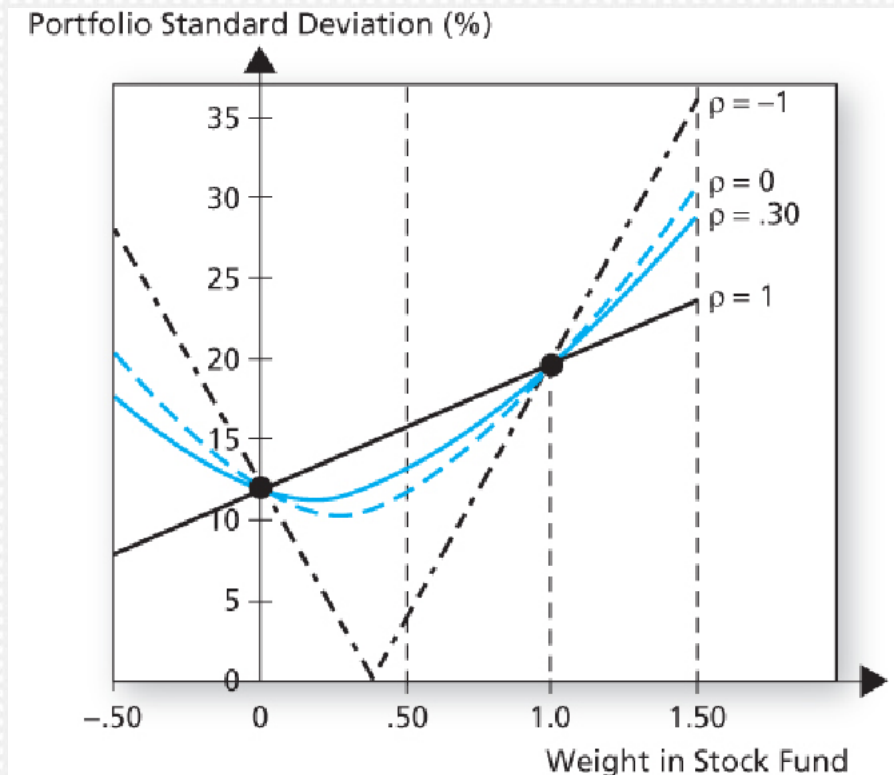
■ بررسی یک مثال:

w_D	w_E	$E(r_p)$	$\rho = -1$	$\rho = 0$	$\rho = .30$	$\rho = 1$
0.00	1.00	13.00	20.00	20.00	20.00	20.00
0.10	0.90	12.50	16.80	18.04	18.40	19.20
0.40	0.60	11.00	7.20	12.92	14.20	16.80
0.50	0.50	10.50	4.00	11.66	13.11	16.00
0.60	0.40	10.00	0.80	10.76	12.26	15.20
0.90	0.10	8.50	8.80	10.98	11.56	12.80
1.00	0.00	8.00	12.00	12.00	12.00	12.00

Minimum Variance Portfolio

	$\rho = -1$	$\rho = 0$	$\rho = .30$
w_D	0.6250	0.7353	0.8200
w_E	0.3750	0.2647	0.1800
$E(r_p)$	9.8750	9.3235	8.9000
σ_p	0.0000	10.2899	11.4473

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

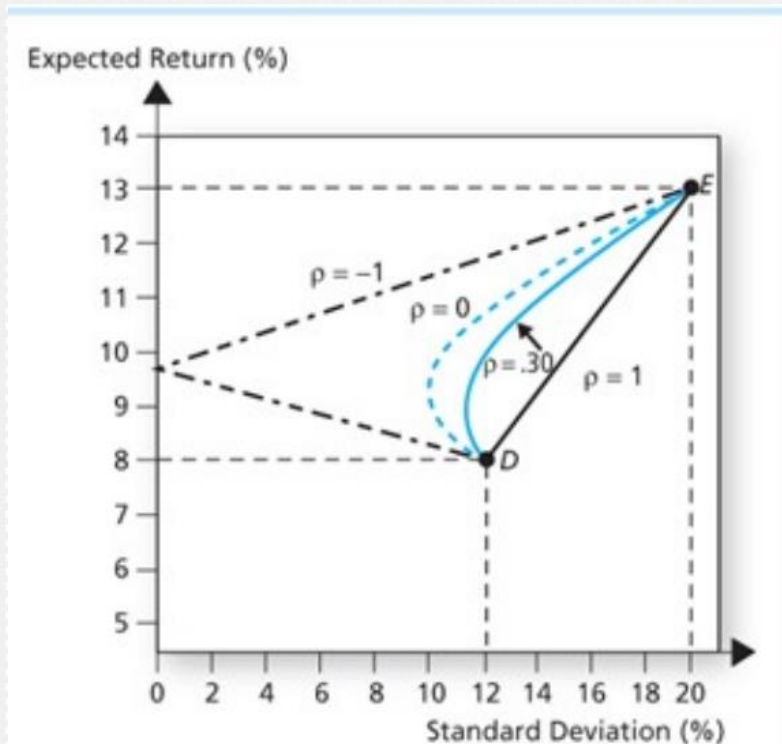


$$\sigma_p^2 = w_D^2 \sigma_D^2 + w_E^2 \sigma_E^2 - 2w_D w_E \sigma_D \sigma_E \rho = 0$$

$$w_D = \frac{\sigma_E}{\sigma_D + \sigma_E}$$

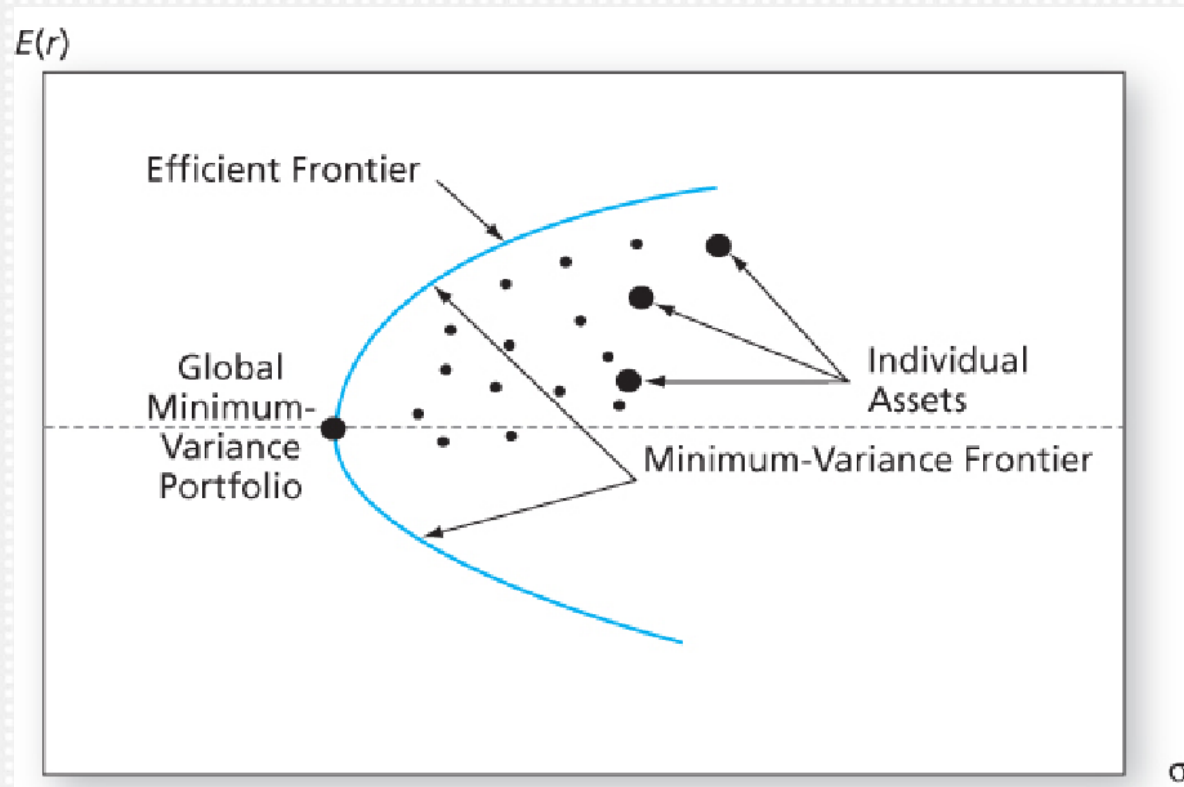
$$w_E = \frac{\sigma_D}{\sigma_D + \sigma_E} = 1 - w_D$$

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی



جمع‌بندی: مقدار کاهش ریسکی که از طریق متنوع‌سازی پرتفوی حاصل می‌گردد به مقدار همبستگی بین سهام موجود در پرتفوی بستگی دارد.

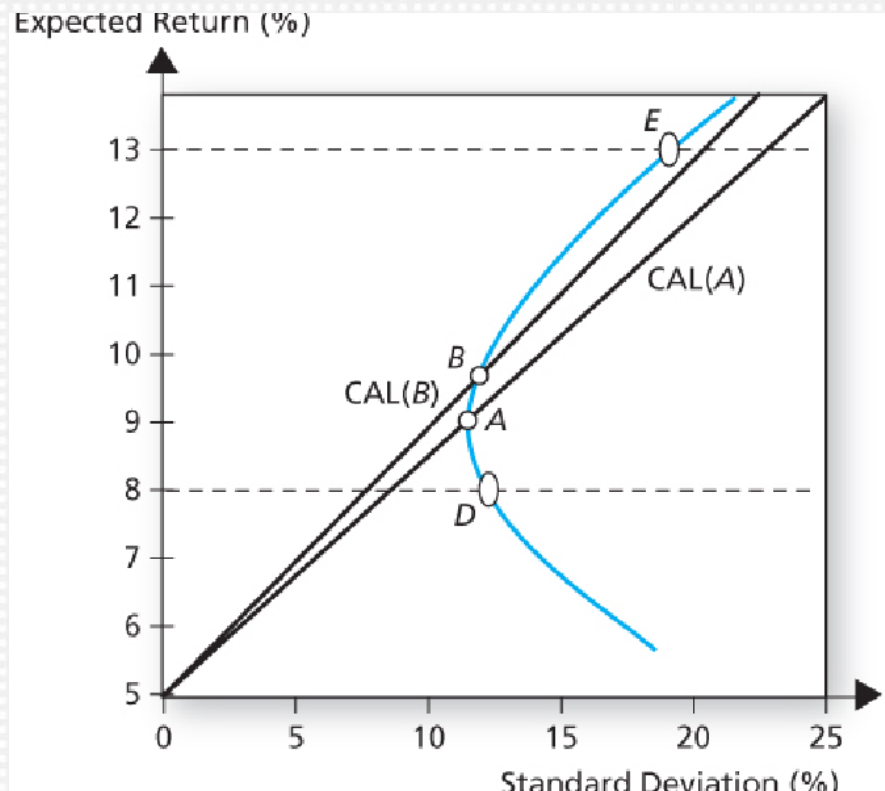
تحلیل مرز کارای مارکوویتز



اصول اساسی مارکوویتز:

- (1) کمترین ریسک در هر سطح بازدهی
- (2) بالاترین بازدهی در هر سطح ریسک

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

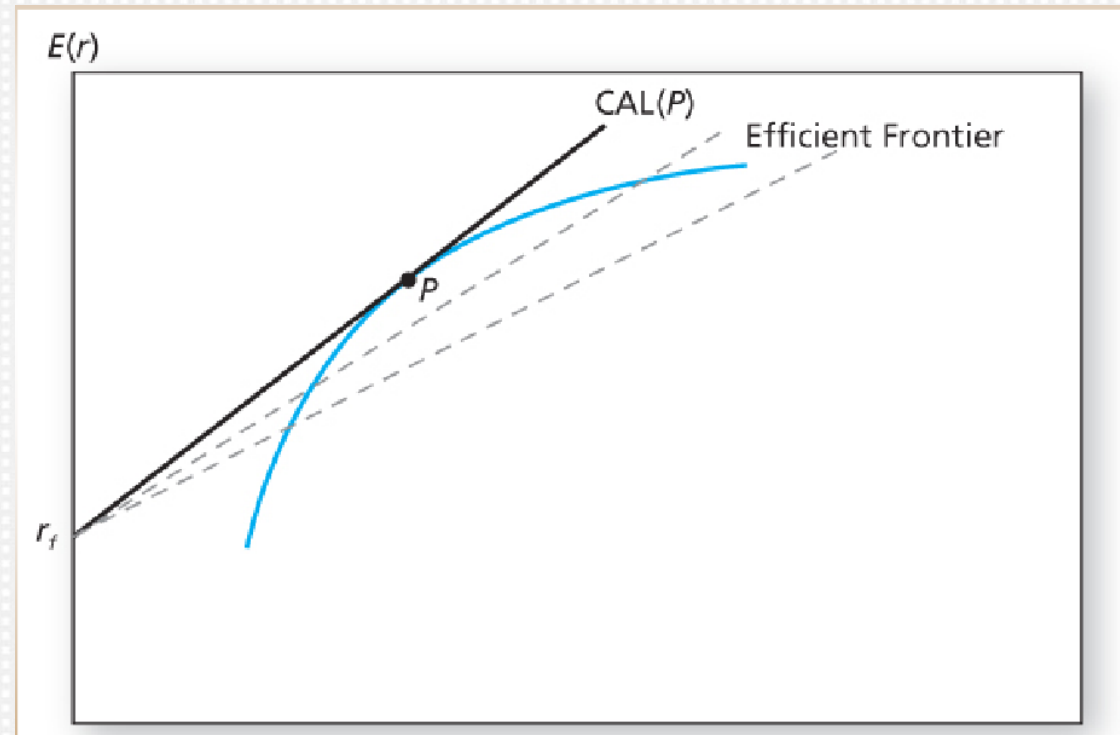


- شیب خط CAL معادل نسبت شارپ است و هرچه قدر بیشتر باشد بهتر است.
- بنابراین هدف ما این است که پرتفوی ریسکی را انتخاب کنیم که بالاترین نسبت شارپ را به ما بدهد.
- بالاترین نسبت شارپ را خط CAL ای دارد که بر مرز کارا مماس است.

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

- گام‌های تعیین پرتفوی متشکل از دارایی‌های ریسکی و دارایی بدون ریسک بر اساس مرز کارای مارکوویتز:
- (1) گام اول این است که فرصت‌های ریسک و بازدهی مختلف ناشی از تعیین وزن‌های سهام را در پرتفوی ریسکی تعیین نماییم.
- (2) تمامی پرتفوهایی که کمترین ریسک را در بالای نقطه ی حداقل ریسک دارند پرتفوهایی مناسب برای سرمایه‌گذاری هستند.
- (3) حال در بین تمامی پرتفوهایی موجود پرتفویی را انتخاب می‌کنیم که بالاترین میزان CAL را داشته باشد (محل مماس شدن خط CAL و مرز کارای مارکوویتز)

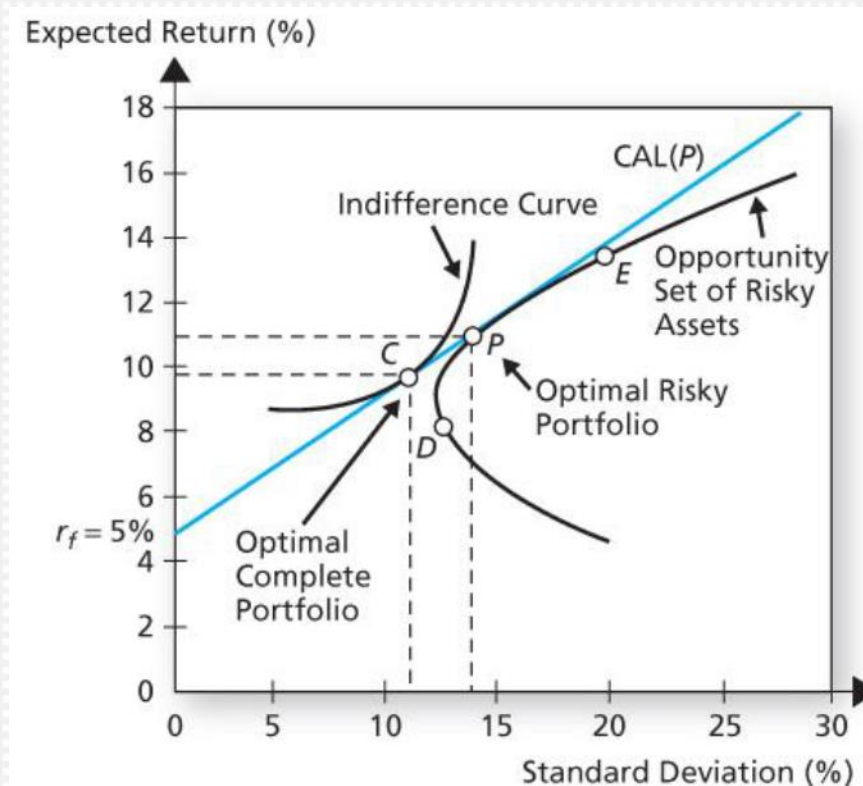
سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی



سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

- گام‌های تعیین پرتفوی متشکل از دارایی‌های ریسکی و دارایی بدون ریسک بر اساس مرز کارای مارکوویتز:
- (۴) حال باید بر اساس تابع مطلوبیت میزان تخصیص کل منابع به پرتفوی ریسکی تعیین گردد و مابقی به پرتفوی بدون ریسک تخصیص خواهد یافت.

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی



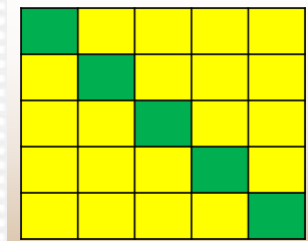
سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ مجدداً فرمول کلی واریانس یک پرتفوی را به یادآورید:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(r_i, r_j)$$

■ حال فرض کنید وزن هر سهام $1/n$ باشد. بنابراین داریم:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n} \text{Cov}(r_i, r_j)$$



سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

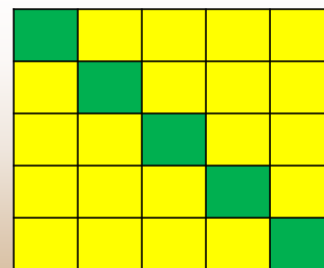
■ فرمول قبل را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n} \text{Cov}(r_i, r_j)$$

■ میانگین‌های زیر را با فرض ثابت بودن واریانس‌ها و کوواریانس‌ها در نظر می‌گیریم:

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$$\overline{\text{Cov}} = \frac{1}{n(n-1)} \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{Cov}(r_i, r_j)}_{n(n-1) \text{ terms}}$$



سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ در نتیجه داریم:

$$\sigma_P^2 = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_i^2}_{\bar{\sigma}^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n} \text{Cov}(r_i, r_j)}_{n(n-1) \text{ terms}}$$

as:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n} \overline{\text{Cov}}$$

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

■ تحلیل عوامل کنترل ریسک در پرتفوی بر اساس رابطه زیر صورت می‌پذیرد:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n} \rho \bar{\sigma}^2$$

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

Universe Size n	Portfolio Weights $w = 1/n$ (%)	$\rho = 0$		$\rho = .40$	
		Standard Deviation (%)	Reduction in σ	Standard Deviation (%)	Reduction in σ
1	100	50.00	14.64	50.00	8.17
2	50	35.36		41.83	
5	20	22.36	1.95	36.06	0.70
6	16.67	20.41		35.36	
10	10	15.81	0.73	33.91	0.20
11	9.09	15.08		33.71	
20	5	11.18	0.27	32.79	0.06
21	4.76	10.91		32.73	
100	1	5.00	0.02	31.86	0.00
101	0.99	4.98		31.86	

تحلیل اثر تغییر تعداد سهام
در کاهش ریسک پرتفوی

سبد سرمایه‌گذاری متشکل از دو دارایی ریسکی

- در بهینه‌سازی پرتفوی فرض ما این بود که رفتار بازدهی‌ها از توزیع نرمال تبعیت می‌کند، در غیر اینصورت باید از معیارهای دیگری برای محاسبه ریسک استفاده نمود و معیار انحراف معیار برای اندازه‌گیری ریسک مناسب نمی‌باشد.
- در این شرایط معمولاً از معیارهای ارزش در معرض خطر (VAR) و یا زیان مورد انتظار (ES) برای محاسبه ریسک استفاده می‌گردد که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

تجميع ريسك ، تسهيم ريسك و افق زمانى بلندمدت

- همانطور كه بيان شد، تنوع‌بخشى به معنای پخش بودجه سرمايه‌گذارى در دارايی‌هاى مختلف است و در نتيجه آن ريسك كل كاهش مى‌يابد.
- حال يك سؤال وجود دارد: آیا با طولانى‌کردن افق زمانى سرمايه‌گذارى مزيت مشابهى مانند متنوع‌سازى رخ مى‌دهد؟ به بيان ديگر آیا تنوع‌بخشى زمانى (Time diversification) وجود داشته و سرمايه‌گذارى بلندمدت‌تر از سرمايه‌گذارى کوتاه‌مدت تر از امنيت بيشترى برخوردار است؟
- براى پاسخ به اين سؤال ابتدا مفاهيم تجميع و تسهيم ريسك را بررسى کرده و سپس به سرمايه‌گذارى در بلندمدت اشاره خواهيم کرد.

تجميع ريسك ، تسهيم ريسك و افق زمانى بلندمدت

تجميع ريسك

- تجميع ريسك (Risk pooling) به معنای ادغام پروژه‌های ريسكى و غيرهمبسته جهت کاهش ريسك است. به طور مثال فروش بيمه‌نامه‌های غيرهمبسته توسط شرکت‌های بيمه نمونه‌ای از تجميع ريسك است. اين مسئله به اصل بيمه شهرت دارد.
- حال در قالب يك مثال اثرات اين تجميع ريسك را تحليل خواهيم كرد.

تجمیع ریسک ، تسهیم ریسک و افق زمانی بلندمدت

تجمیع ریسک

- واران سبدي یک میلیارد دلاری دارد (سبد P)
- میزان y از پول خود را در دارایی A سرمایه‌گذاری کرده و $1-y$ را در دارایی بدون ریسک سرمایه‌گذاری می‌کند.
(صرف ریسک دارایی A معادل R و انحراف معیار آن معادل σ است.)
- صرف ریسک سبد کلی معادل $R_p = yR$ و انحراف معیار آن معادل $\sigma_p = y\sigma$ است و نسبت شارپ سبد معادل $S_p = \frac{R}{\sigma}$ است.

تجميع ريسك ، تسهيم ريسك و افق زمانى بلندمدت

تجميع ريسك

- حال فرض كنيد يك دارايى كاملاً غيرهمبسته به دارايى A مانند دارايى B را به سبد اضافه كنيم (دارايى B همان ويژگى‌هاى ريسك و بازدهى دارايى A را داشته و فرد به اندازه دارايى A داخل آن سرمايه‌گذارى مى‌كند).
- در اين حالت بازده سبد معادل $R_Z = 2yR$ است و همچنين واريانس سبد به صورت ذيل خواهد بود:

$$\sigma_Z^2 = y^2 \sigma^2 + y^2 \sigma^2 + 0 = 2 y^2 \sigma^2$$

- انحراف معيار سبد معادل $\sigma_Z = \sqrt{2} y \sigma$ و همچنين نسبت شارپ $S_Z = \sqrt{2} \times \frac{R}{\sigma}$ مى‌گردد.

تجميع ريسك ، تسهيم ريسك و افق زمانى بلندمدت

تجميع ريسك

- همانطور كه مشاهده شد، تجميع ريسك باعث كاهش ريسك نمى‌شود بلكه ريسك را افزايش مى‌دهد، اما مزيت آن در اين است كه على رغم افزايش ريسك مقدار نسبت شارپ را نيز افزايش مى‌دهد.
- طبق اصل بيمه با افزايش بيمه‌نامه‌هاى غيرهمبسته، ميزان افزايش ريسك از افزايش تعداد بيمه‌نامه‌ها كمتر بوده؛ بنابراين سودآورى كه با شاخص نسبت شارپ نمايش داده مى‌شود، افزايش مى‌يابد.
- بنابراين بايد گفت تجميع ريسك به طور كلى ريسك شركت را افزايش مى‌دهد. يعنى سرمايه‌گذارى در دارايى‌هاى غيرهمبسته به طور كلى سرمايه شركت را در معرض ريسك بيشترى قرار خواهد داد.

تجمیع ریسک ، تسهیم ریسک و افق زمانی بلندمدت

تجمیع ریسک

- در واقع باید گفت تحلیلگران صنعت بیمه در مبنای احتمال زیان تصمیم می گیرند. در واقع احتمال زیان از طریق تجمیع ریسک کاهش می یابد. این مسئله همان مسئله افزایش نسبت شارپ است نه کاهش ریسک. بنابراین نباید کاهش احتمال زیان را به مبنای کاهش ریسک در نظر گرفت.
- خلاصه بحث: شاخص اندازه گیری ریسک انحراف معیار است که با تجمیع ریسک افزایش می یابد.

تجمیع ریسک ، تسهیم ریسک و افق زمانی بلندمدت

تسهیم ریسک

- تسهیم ریسک به این معناست که حال فرد همان مقدار y را به سبد ریسکی تخصیص دهد؛ نصف آن را به B و نصف را به A . یعنی $y/2$ از هر دارایی در پرتفوی قرار دهد. (در حالت تجمیع ریسک، مقدار y را به A تخصیص داده بود و وقتی B را افزود، مقدار y دیگر را به آن تخصیص داد).

- استراتژی تسهیم ریسک را با V نشان می‌دهیم و داریم:

$$R_V = 2 \frac{y}{2} R = yR$$

$$\sigma_V^2 = 2 \left(\frac{y}{2}\right)^2 \sigma^2 = y^2 \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_V^2} = \frac{y\sigma}{\sqrt{2}}$$

$$S_V = \frac{R_V}{\sigma_V} = \sqrt{2} \frac{R}{\sigma}$$

تجميع ريسك ، تسهيم ريسك و افق زمانى بلندمدت

تسهيم ريسك

- همانطور كه مشخص شد، در تسهيم ريسك (Risk sharing) نسبت شارپ با حالت قبل برابر است اما ريسك كاهش مى يابد.
- بنابر اين تسهيم ريسك است كه يك متنوع سازى به معناى واقعى بوده و باعث كاهش ريسك مى گردد.

تجميع ريسك ، تسهيم ريسك و افق زمانى بلندمدت

جمع بندى

- حال به سؤال اصلى خود بر مى گرديم: سرمايه گذارى بلندمدت و متنوع سازى زمانى به چه صورت است و آيا واقعا باعث کاهش ريسك مى شود؟
- در جواب بايد گفت سرمايه گذارى بلندمدت مانند تجميع ريسك است چون ريسك سال اول و ريسك سال دوم و سال هاى بعد مشابه هست و به يكديگر مرتبط نيست و در واقع با افزايش افق زمانى صرفاً نسبت شارپ مى تواند افزايش يابد نه اينكه ريسك کاهش يابد.
- بنابر اين تغيير افق زمانى سرمايه گذارى به بلندمدت (متنوع سازى زمانى) باعث کاهش ريسك واقعى نمى شود و فقط نسبت شارپ را بالا مى برد.